

## 裂 軸 振 動 分 析

林其璋<sup>1</sup> 范景南<sup>2</sup> 林呈<sup>1</sup> 潘犀明<sup>2</sup>

關鍵詞：裂軸、旋轉機器、振動診斷。

### 摘 要

本文推導理論模式，探討具裂縫之軸承的振動行為，針對裂縫為永遠開啓或具開啓/閉合情況下，計算裂軸之振動反應訊號會顯現高於運轉頻率兩倍及三倍之振動頻率，這與實測反應一致，因此所導理論模式可用以診斷旋轉機器中軸承斷面不對稱或更進一步發現軸裂的情況。

## VIBRATION ANALYSIS OF CRACKED SHAFTS

Chi-Chang Lin<sup>1</sup>, Ching-Nan Fan<sup>2</sup>, Chang Lin<sup>1</sup>, and Hsi-Ming Pan<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Department of Civil Engineering  
National Chung-Hsing University  
Taichung, Taiwan 40227, R.O.C.*

<sup>2</sup>*Institute of Nuclear Energy Research  
Atomic Energy Council  
Lungtan, Taiwan 32500, R.O.C.*

**Key Words:** Cracked Shaft, Rotating Machine, Vibration Diagnostics.

### ABSTRACT

This paper develops a theoretical model to investigate the dynamic behavior of shafts with open and open/close cracks. Numerical results show that the cracked shafts will generate vibration signals with two times and/or three times of the operating frequency, which are consistent with the real measurements. Hence, the proposed model is useful for identifying the plane asymmetry and further, cracks of the bearing systems in rotating machines.

### 一、前 言

核能電廠內部重要元件如再循環水泵 (recirculation pump)、主冷卻水泵(primary coolant pump)、渦輪機(turbine)等旋轉機器，在長時間連續高速運轉後，可能因機件材料疲勞等因素而產生異常狀況乃至於損壞(如軸裂)。若機件損壞未及時發現並予改善，對周邊設備將造成進一步損害，如此則檢

查修復工作會更需時費日，除導致供電不足而必須實施限電造成民衆生活不便外，經濟層面的損失亦相當大，並且加深民衆對核能電廠運轉安全的疑慮。機器振動監測與診斷(machinery monitoring and diagnostics)近年來極受工業界與學術界之重視，其目的在於建立一套預警系統，針對上述機件的運轉操作，從事長期的監測與追蹤，期能在機件出現損壞(或異常)的初期，即能有效地診斷出損壞狀況、損壞程度與損壞位置。藉此，可大大地提昇各重要元件的使用壽命，並大幅降低維修時間與費用，此對核能電廠之營運績效及安全維護十分重要。

<sup>1</sup>國立中興大學土木工程研究所副教授

<sup>2</sup>行政院原子能委員會核能研究所副研究員

機器振動監測與診斷之基本步驟在於藉由機器自發性激發 (self-excitation) 而量測其振動訊號，這些訊號內含了機器運轉時的健康狀態，當機器正常或損壞時之振動訊號會有所差異，應用訊號分析技巧，提煉量測訊號中與損壞直接相關而且可靠的特徵信號 (feature signature)，以判斷並區分機器運轉狀況、損壞程度及損壞位置，已被公認是最為實際可行的途徑 [1]，然而此特徵訊號係隨著機器發生故障或損壞原因而有所不同，這些原因大致包括軸裂、質量不平衡 (unbalance)、摩擦 (rubbing)、軸向及徑向負荷過大 (excessive preload)、軸承油漩 (oil whirl) 與顫動 (whip)、轉件鬆動 (loose rotating part)、對心不準 (misalignment) 等等。因此，若欲以機器振動監測與診斷系統有效地、即時地判斷機器運轉之狀態，並據此擬定妥善處理對策，其關鍵在於必須針對這些原因及其所呈現之徵兆 (如訊號特徵) 徹底瞭解。由過去經驗知道軸承產生裂縫為目前電廠機件最常發生之異常狀況，其伴隨之量測訊號會出現高於軸承運轉頻率兩倍及三倍之分量，因此異常頻率訊號之出現應為軸裂之特徵，如何由此判定軸裂程度、預防惡化值得深入探討。

有關具橫向 (transverse) 裂縫轉軸之振動行為分析，Dimarogonas [2] 及 Pafelias [3] 首先推導含裂縫轉子之彎曲勁度，Gasch [4]、Henry 和 Okah-Avae [5] 將因裂縫的存在而導致勁度改變的概念引入運動方程式，並考慮在轉動座標系統中具開啓、閉合裂縫時有不同撓度的閉合裂縫的非線性機制。Mayes 和 Davies [6] 應用 Paris 能量法則及直接使用固定座標系統，簡化勁度變化為一時間週期的階梯函數，推導二自由度圓盤轉子的裂縫柔數 (crack compliance) 之估算法。Mayes [7] 則將上述方法另推展應用至轉動的 Bernoulli-Euler 樑上。Grabowski 和 Mahrenholtz [8] 利用模態公式化 (modal formulation)，探討具真實裂縫轉子系統之振動行為。Muszynska [9] 分別考慮間距 (gaping) 及啓閉 (breathing) 裂縫的情況，利用勁度之局部變化特性，發展出一具有不平衡及受重力擾動條件下間距裂縫之解析解。Dimarogonas 和 Papadopoulos [10,11] 應用結構構件之橫向裂縫附近在負荷下由於應變能量的集中會導致局部撓曲的概念，推演具裂縫轉動軸之局部撓曲矩陣 (local flexibility matrix)，他們發現：由於彎曲及扭曲振動的耦合 (coupling) 導致兩倍頻訊號出現以及頻率的改變 (frequency shifting) 可作為裂縫存在與否的辨別指標。Dirr 和 Schmalhorst [12]、Schmalhorst [13] 及 Imam [14] 等人利用三維有限元素法成功地模擬具裂縫之測試轉子的振動行為。Wauer [15] 則針對往昔有關具裂

縫轉子之動力特性研究作一簡捷之文獻回顧。國內學者黃世欽 [16] 應用能量關係法及假設模態法，推導具裂縫轉軸之離散化方程式，並探討具橫向裂縫之轉軸的動態反應。本文為理論推演具裂縫之轉軸的運動方程式，依數值計算方式探討具裂縫之轉軸的動態特性，發現假設裂縫為永遠開啓或為開啓 / 閉合狀況時，除如前人結論會產生兩倍頻外亦會出現三倍於軸承運轉頻率之振動訊號，這與現場及實驗室實測之結果一致 [17]。因此，經由本研究對具裂縫轉軸振動特性及徵兆的瞭解，期能於將來進一步發展為應用於線上偵測軸承裂縫之技術。

## 二、裂軸振動之理論推導

假設一長度為  $l$  之簡支 (simply supported) 均勻等斷面圓形轉軸及轉盤系統如圖一及圖二所示，茲定義 Y-Z 為固定座標系， $\eta$ - $\xi$  為轉軸旋轉時之主軸，其與 Y-Z 座標系夾角  $\psi$  隨時間變化而改變。 $\eta'$ - $\xi'$  為裂縫斷面之主軸其與  $\eta$ - $\xi$  座標系所夾方位角為  $\phi$ 。若忽略轉軸剪力變形，並令  $I_0$  為無裂縫時轉軸之斷面二次矩，則無裂縫時轉軸於  $\eta$  及  $\xi$  方向之柔度 (flexibility) 係數為

$$f_{\eta} = \int_0^l \frac{M_{\eta}^2(x)}{EI_0} dx; \quad f_{\xi} = \int_0^l \frac{M_{\xi}^2(x)}{EI_0} dx \quad (1)$$

其中  $M_{\eta}(x)$  為彎矩， $E$  為材料楊氏係數。茲假設距 A 端  $x_0$  處有一寬度為  $h$ ，深度為  $d$  之裂縫，則有裂縫時轉軸於  $\eta$  方向之柔度係數變為

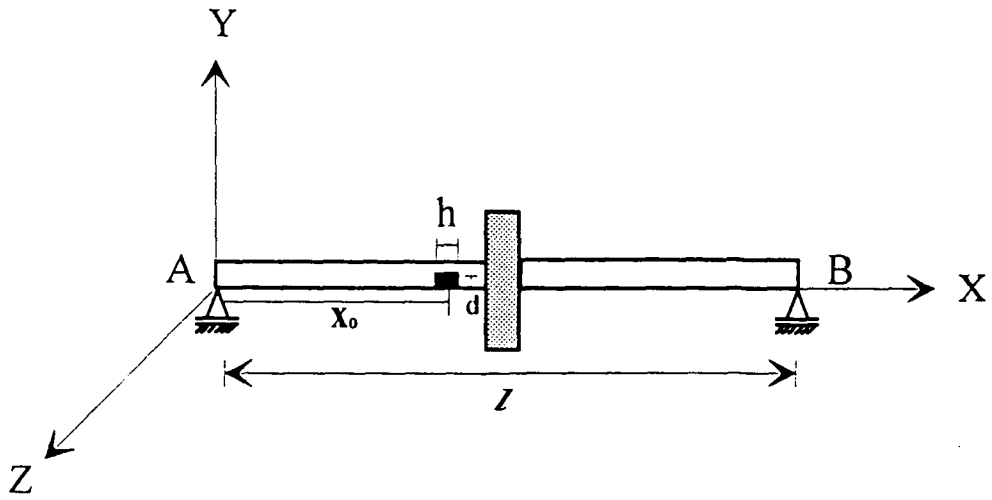
$$\begin{aligned} F_{\eta} &= \int_0^l \frac{M_{\eta}^2(x)}{EI_0} dx - \int_{x_0-h/2}^{x_0+h/2} \frac{M_{\eta}^2(x)}{EI_0} dx + \int_{x_0-h/2}^{x_0+h/2} \frac{M_{\eta}^2(x)}{EI_{\eta}} dx \\ &= \int_0^l \frac{M_{\eta}^2(x)}{EI_0} dx + \int_{x_0-h/2}^{x_0+h/2} \frac{M_{\eta}^2(x) dx}{E} \left( \frac{1}{I_{\eta}} - \frac{1}{I_0} \right) \\ &= f_{\eta} (1 + \varepsilon \frac{\Delta I_{\eta}}{I_{\eta}}) \end{aligned} \quad (2)$$

同理於  $\xi$  方向

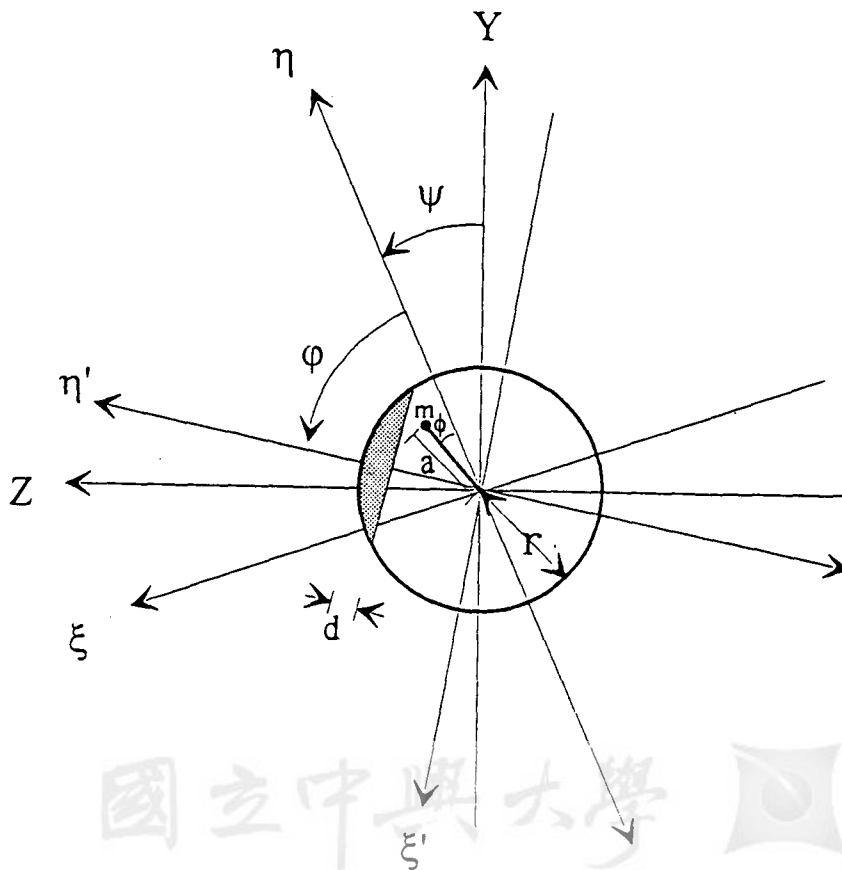
$$F_{\xi} = f_{\xi} (1 + \delta \frac{\Delta I_{\xi}}{I_{\xi}}) \quad (3)$$

公式(2)及(3)中

$$\varepsilon \equiv \frac{M_{\eta}^2(x=x_0)h}{EI_0 f_{\eta}}; \quad \delta \equiv \frac{M_{\xi}^2(x=x_0)h}{EI_0 f_{\xi}} \quad (4)$$



圖一 轉軸、轉盤系統圖



國立中興大學

National Chung Hsing University

圖二 裂縫斷面圖

$$\Delta I_{\eta} = I_0 - I_{\eta}; \Delta I_{\xi} = I_0 - I_{\xi} \quad (5)$$

而  $I_{\eta}$ 、 $I_{\xi}$  為有裂縫時斷面對旋轉主軸  $\eta$ - $\xi$  之二次矩。

若圓盤質心與轉軸中心有  $a$  之偏心距，轉軸半徑為  $r$ ，轉速為  $\Omega$ ，假設圓盤偏心位置與  $\eta$ - $\xi$  座標之起始夾角為  $\phi$ ，因此離心力  $m\Omega^2 a$  在  $Y$  方向之分量為  $ma\Omega^2 [\cos(\Omega t + \phi)]$ ，在  $X$  方向之分量為  $ma\Omega^2 [\sin(\Omega t + \phi)]$ 。因轉軸旋轉時之主軸 ( $\eta$ - $\xi$ ) 隨時間變化，故有裂縫時於 ( $Y$ - $Z$ ) 座標之勁度 (stiffness) 係數亦隨時間而改變，其與 ( $\eta$ - $\xi$ ) 方向之勁度係數  $K_{\eta} (= 1/F_{\eta})$  及  $K_{\xi} (= 1/F_{\xi})$  之關係式如下所示

$$[K_{YZ}] = \frac{K_{\eta} + K_{\xi}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{K_{\eta} - K_{\xi}}{2} \begin{bmatrix} \cos(2\Omega t) & \sin(2\Omega t) \\ \sin(2\Omega t) & -\cos(2\Omega t) \end{bmatrix} \quad (6)$$

茲定義無裂縫時之勁度係數  $k = 1/f_{\eta} = 1/f_{\xi}$ ，並假設  $\varepsilon = \delta$ ，則根據 (1) ~ (6) 式可得

$$K_{\eta} \approx k(1 - \varepsilon \frac{\Delta I_{\eta}}{I_{\eta}}); K_{\xi} \approx k(1 - \varepsilon \frac{\Delta I_{\xi}}{I_{\xi}}) \quad (7)$$

$$[K_{YZ}] = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} - k\varepsilon \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} - k\varepsilon\beta \begin{bmatrix} \cos(2\Omega t) & \sin(2\Omega t) \\ \sin(2\Omega t) & -\cos(2\Omega t) \end{bmatrix} \quad (8)$$

式(8)中， $\alpha$ 、 $\beta$  均為裂縫方位角  $\phi$  的函數且表示為

$$\alpha = \alpha(\phi) = \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta I_{\eta}}{I_{\eta}} + \frac{\Delta I_{\xi}}{I_{\xi}} \right) \quad (9)$$

$$\beta = \beta(\phi) = \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta I_{\eta}}{I_{\eta}} - \frac{\Delta I_{\xi}}{I_{\xi}} \right) \quad (10)$$

假設轉軸系統等值質量為  $m$ ，阻尼係數為  $c$ ，則整體轉軸系統於 ( $Y$ - $Z$ ) 方向之運動方程式表示為

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y \\ Z \end{Bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y \\ Z \end{Bmatrix} - \varepsilon \Delta [K] \begin{Bmatrix} Y \\ Z \end{Bmatrix} \\ & = ma\Omega^2 \begin{Bmatrix} \cos(\Omega t + \phi) \\ \sin(\Omega t + \phi) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -mg \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (11) \end{aligned}$$

其中

$$\Delta [K] = \alpha \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} + \beta k \begin{bmatrix} \cos(2\Omega t) & \sin(2\Omega t) \\ \sin(2\Omega t) & -\cos(2\Omega t) \end{bmatrix} \quad (12)$$

由公式(11)我們可以得知，由於軸裂導致勁度

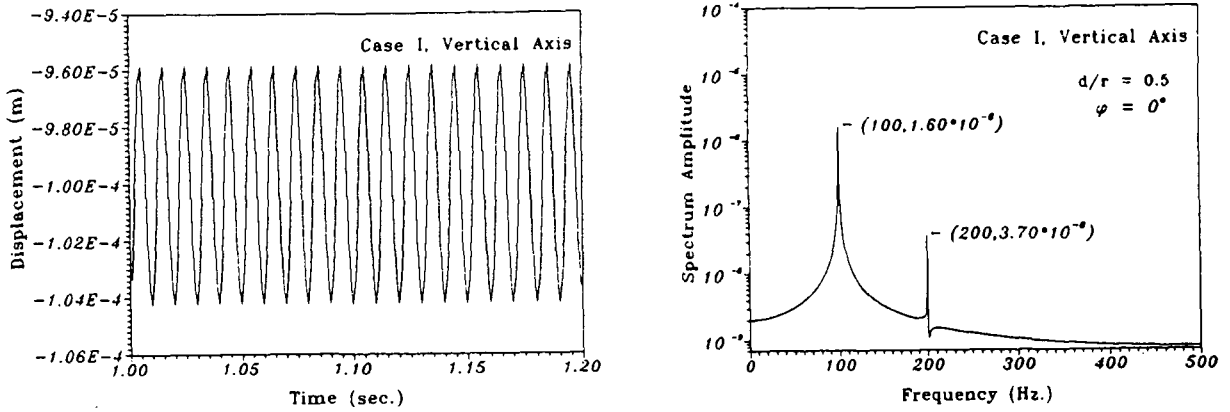
係數改變，如此將使轉軸於垂直 ( $Y$ ) 方向及水平 ( $Z$ ) 方向產生異於運轉頻率  $\Omega$  之振動，這主要肇因於裂縫斷面對旋轉主軸  $\eta$ - $\xi$  之二次矩  $I_{\eta}$  及  $I_{\xi}$  值之變化，由此直接影響運動方程式中  $\alpha$  及  $\beta$  之值，同時由公式 (12) 知道系統勁度改變量  $\Delta [K]$  亦產生改變。而  $I_{\eta}$  及  $I_{\xi}$  值和裂縫位置參數  $x_0$ 、 $d/r$  以及  $\phi$  之大小有關，且由公式 (10) 之關係式可知若裂縫產生後轉軸斷面仍保持對稱，亦即  $I_{\eta} = I_{\xi}$ ，則將不會產生異常頻率之振動反應訊號。

### 三、數值模擬

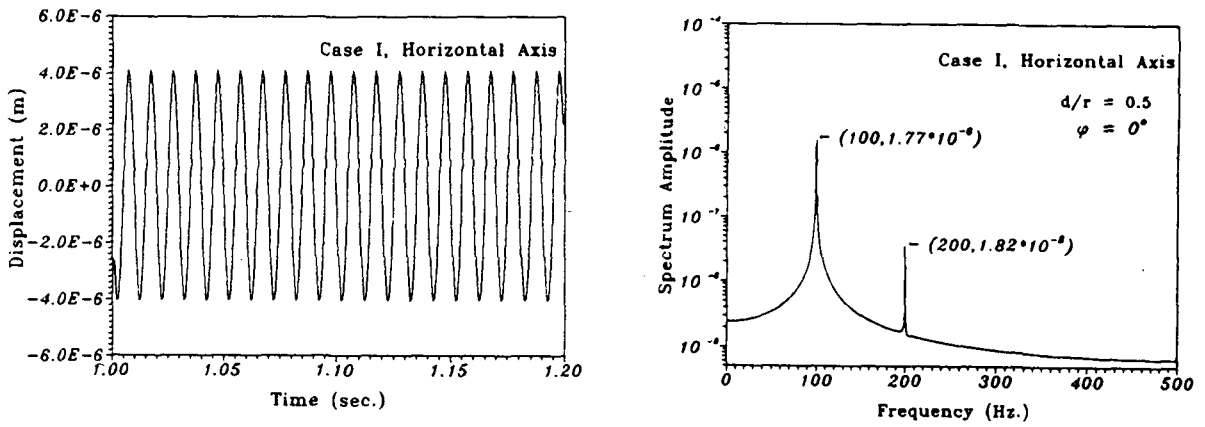
假設轉軸長度  $l = 230.82 \text{ cm}$ ，斷面半徑  $r = 20 \text{ cm}$ ，裂縫寬度  $h = 5 \text{ cm}$ ，質量  $m = 9.81 \text{ kg}$ ，阻尼係數  $c = 310.22 \text{ N-sec/m}$ ，無裂縫時之勁度係數  $k = 981000 \text{ N/m}$ ，經計算可得整體系統之基本振動頻率約為  $50 \text{ Hz}$ ，模態阻尼比為  $5\%$ ，此外假設圓盤質心與轉軸中心有微小的偏心距  $a = 3.34 \mu\text{m}$ ，座標夾角  $\phi = 0^\circ$ 。依試驗觀察，一具裂縫之轉軸轉盤系統，其裂縫位置之斷面並非永遠張開，而是會隨轉軸旋轉產生開啓一閉合 (open-close) 之現象，亦即斷面二次矩  $I$  值應隨時間改變，因此本文除如前人研究假設裂縫為永遠開啓外，亦針對裂縫具開啓/閉合行為進行數值模擬計算，以探討這兩種裂縫行為模式對轉軸垂直及水平方向振動振幅 (vibration amplitude) 及頻含 (frequency contents) 之影響。

#### 3.1 狀況 I (Case I) — 開啓裂縫

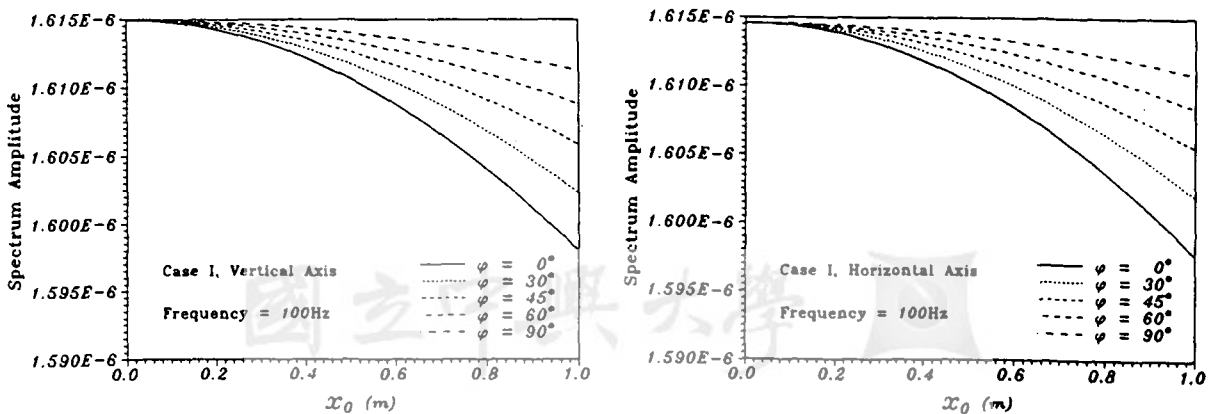
假設裂縫為永遠開啓，裂縫深度與軸半徑比  $d/r = 0.5$ ，圖三及圖四分別表示當轉速  $\Omega = 6280 \text{ rpm}$  (或  $100 \text{ Hz}$ ) 時，在轉軸中央所測到垂直與水平位移振動歷時曲線以及其傅立葉頻譜圖 (Fourier spectrum)。由振譜圖中證實當裂縫存在時，無論水平或垂直都會出現 2 倍於運轉頻率之振動反應訊號。圖五表示轉軸中央測點之垂直與水平振動訊號中頻率為  $100 \text{ Hz}$  之振幅值隨裂縫位置  $x_0$  不同時之變化曲線，圖中顯示當裂縫愈趨近轉軸中央時，無論裂縫為任何角度，反應訊號之振幅愈小，這可解釋為裂縫愈趨近轉軸中央，轉軸系統基本振動頻率愈小而且愈遠離  $100 \text{ Hz}$  的運轉頻率，因此振幅減小。同樣地，圖六表示轉軸中央測點垂直與水平振動訊號中頻率為  $200 \text{ Hz}$  之振幅值隨裂縫位置  $x_0$  變化之曲線，因  $200 \text{ Hz}$  振動訊號係因裂縫產生所引致，當裂縫位置愈接近中央測點時其振幅將愈大，而且當方位角  $\phi = 45^\circ$  時，因  $I_{\eta} = I_{\xi}$ ，所以不會有  $200 \text{ Hz}$



圖三 狀況I，轉軸中央垂直位移振動歷時曲線及振譜圖



圖四 狀況 I，轉軸中央水平位移振動歷時曲線及振譜圖



圖五 狀況 I，轉軸中央振動訊號頻率為 100Hz 之振幅隨裂縫位置  $x_0$  變化之曲線

之訊號產生，這可由圖六中得到印證。同時，我們由圖中可看出此額外 2 倍頻訊號振幅之變化：當  $\varphi = 0^\circ$  時之振幅大於  $\varphi = 30^\circ$  時， $\varphi = 45^\circ$  時振幅消失，而後當  $\varphi = 60^\circ$  時振幅又出現，最後當  $\varphi = 90^\circ$  時，振幅又增至最大。此乃因  $\varphi = 0^\circ$  及  $\varphi = 90^\circ$  時，斷面為最不對稱， $I_\eta$  與  $I_\xi$  的差值最大，所以對  $\beta$  值的影響最大，因此會增大 200Hz 訊號之振幅。而  $\varphi = 0^\circ$  時之振幅會稍大於  $\varphi = 90^\circ$  係因垂直方向額外受重力的影響之故。

### 3.2 狀況 II(Case II) 一開啓閉合裂縫

經由上節之探討，我們驗證了高頻振動訊號之產生與  $I$  值因裂縫之方位角  $\varphi$  與裂縫深度 / 轉軸半徑比 ( $d/r$ ) 不同而改變有相當直接的關係， $I$  值變化間接影響  $\beta$  值，進而造成不同大小的高頻振幅值。接著，本文進一步探討轉軸裂縫具開啓 / 閉合行為時，上節之振動訊號特徵是否仍然存在。由於裂縫完全閉合時，轉軸斷面模數應與無裂縫時相同，裂縫張開大小與其轉動位置或角度相關，因此，當裂縫具開啓 / 閉合行為時，假設公式 (8)、(9) 中之參數可假設為

$$\alpha = \alpha(\varphi, \theta) = \frac{\alpha_0}{2} (1 - \cos \theta) \quad (13)$$

$$\beta = \beta(\varphi, \theta) = \frac{\beta_0}{2} (1 - \cos \theta) \quad (14)$$

其中  $\alpha_0$ 、 $\beta_0$  如同公式 (8)、(9) 與起始方位角  $\varphi$  有關，而  $\theta$  為時間的函數。令  $\theta = \Omega t$  則可用以模擬轉軸斷面模數  $I$  值隨時間改變之現象。圖七及圖八分別表示當轉速等於 100Hz 時，在轉軸中央所測到垂直與水平位移振動歷時曲線以及傅立葉頻譜圖，由圖八振譜圖說明了當裂縫具開啓 / 閉合現象時，會同時出現 2 倍、3 倍於運轉頻率之振動反應訊號，這與實測訊號一致，因此推斷真實裂縫應具開啓 / 閉合行為。同時，由實測或實驗室模擬裂軸振動發現有時會出現更高倍訊之訊號，這表示裂縫之開啓 / 閉合行為應比公式 (13)、(14) 式更為複雜，值得進一步探討。

圖九表示當裂縫深度比  $d/r = 0.5$ ，轉軸中央測點之垂直與水平振動訊號中頻率為 100Hz 之振幅值隨裂縫位置  $x_0$  不同時之變化曲線，由於裂縫發生開啓 / 閉合狀況，無論裂縫位置為何，其轉軸斷面模數  $I$  值皆比同位置時裂縫永遠開啓狀況下為大，而且裂縫愈近中央時，轉軸自然振動頻率未必愈小

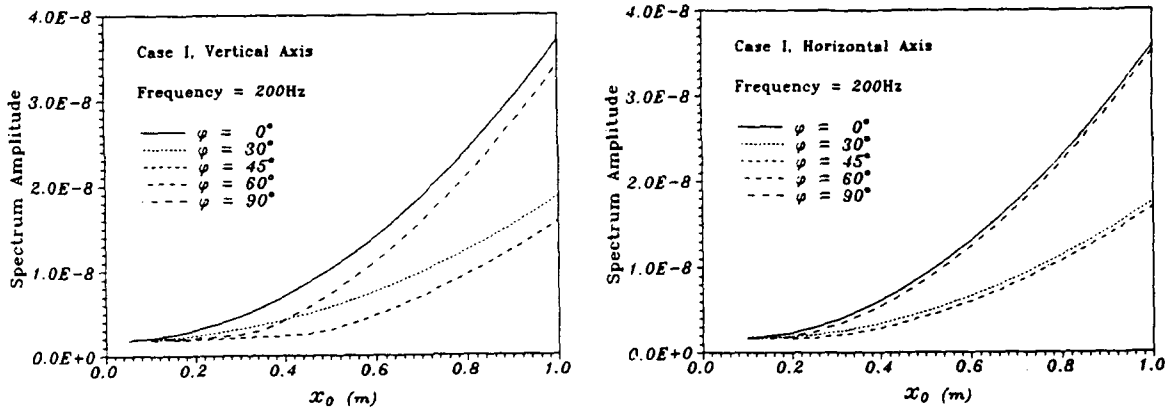
，經模擬發現中央測點振幅有隨  $x_0$  愈靠近中央量測位置而增大的趨勢，而且我們發現振幅增大的趨勢較圖五振幅減小的趨勢顯著。此外，圖十表示振動訊號中頻率為 300Hz 之振幅隨裂縫位置  $x_0$  之變化情形，由圖八及圖十中皆可看出量測水平方向之振動訊號較能檢測裂縫所造成高倍頻之振動，這亦與實驗室模擬試驗結果一致。

## 四、結論與建議

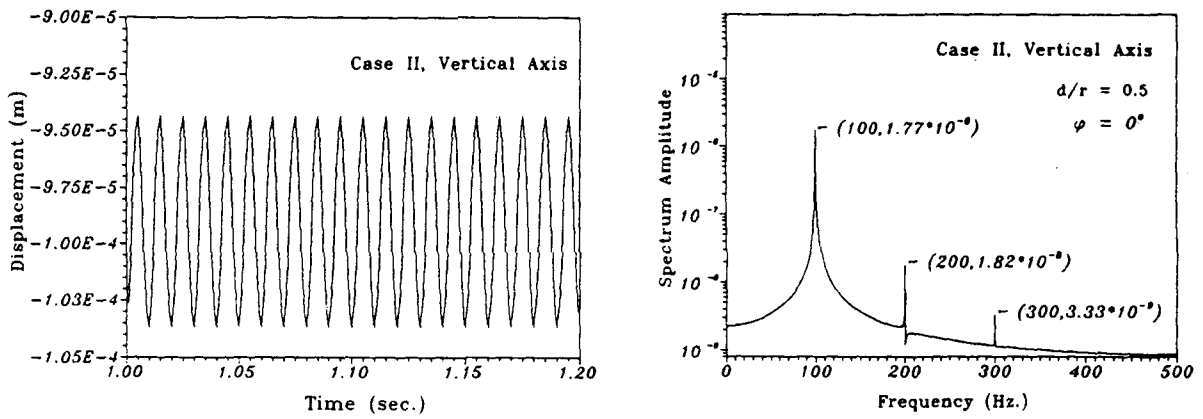
本文以數值方法探討具裂縫之軸承的振動行為，經本文模擬分析結果獲致以下之結論：(1) 針對裂縫為永遠開啓或具開啓 / 閉合行為兩種狀況，應用本文推導之理論模式均能模擬計算出系統之振動反應訊號會顯現兩倍及三倍於運轉頻率之振動反應訊號，因此本文模式可用以診斷軸承斷面不對稱或更進一步發現軸裂之情況；(2) 當裂縫位置愈接近軸承中央或裂縫深度 / 軸徑比愈大時，其所引致高倍頻振動訊號之振幅將會大，因此偵測診斷高倍頻振動將可了解軸裂程度；(3) 實測裂軸振動會出現更高倍頻訊號，顯示裂軸之振動行為相當複雜，值得進一步探討。

## 參考文獻

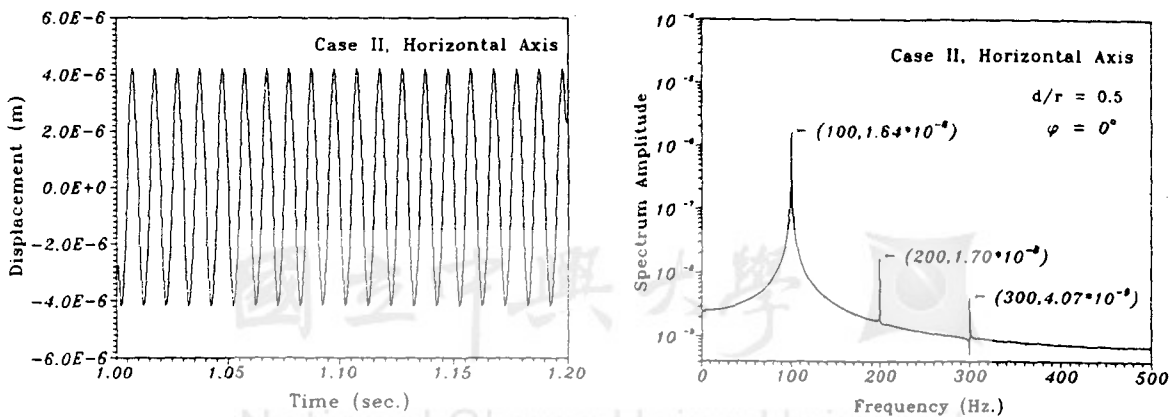
1. Soong, T.T., Lin, C.C., et al, "Method and Apparatus for Diagnosing the State of a Machine", U.S. Patent No. 4-980-844, December 25, (1990).
2. Dimarogonas, A.D., "Dynamic Response of Cracked Rotors", General Electric Co., N.Y., (1970).
3. Pafelias, T., "Dynamic Behavior of A Cracked Rotor", *Technical Information Series*, No. DF-74-LS-79, General Electric Co., N.Y., (1970).
4. Gasch, R., "Dynamic Behavior of A Simple Rotor with A Cross-Sectional Crack", in *Vibrations in Rotating Machinery*, Institution of Mechanical Engineers, London, pp. 123-128 (1976).
5. Henry, T.A., and Okah-Avae, B.E., "Vibrations in Cracked Shafts", in *Vibrations in Rotating Machinery*, Institution of Mechanical Engineers, London, pp. 15-19 (1976).



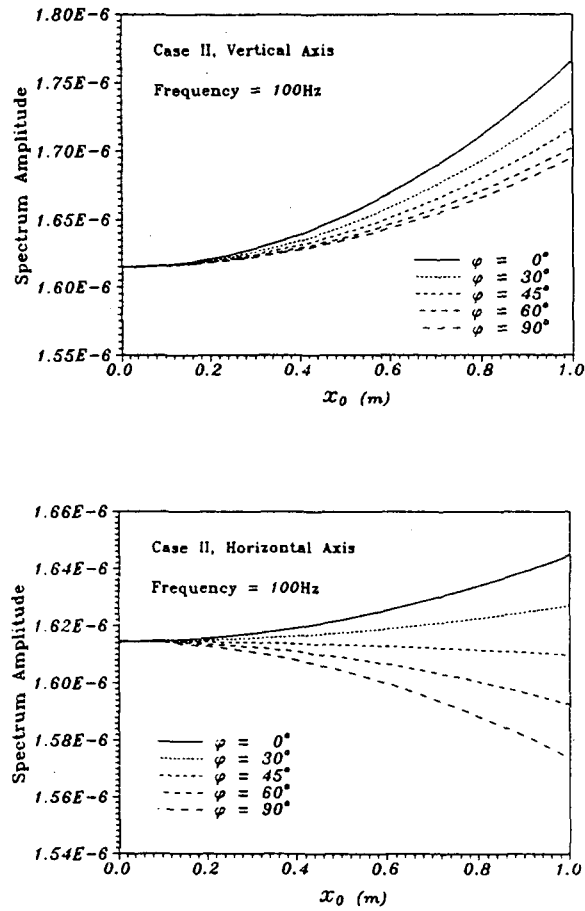
圖六 狀況I，轉軸中央振動訊號頻率為200Hz之振幅隨裂縫位置 $x_0$ 變化之曲線



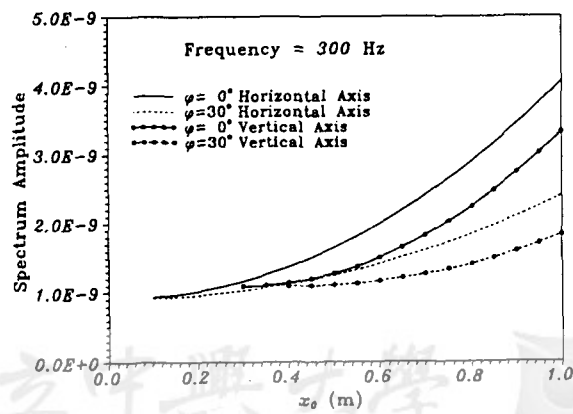
圖七 狀況II，轉軸中央垂直位移振動歷時曲線及振譜圖



圖八 狀況II，轉軸中央水平位移振動歷時曲線及振譜圖



圖九 狀況 II，轉軸中央振動訊號頻率為 100Hz 之振幅隨裂縫位置  $x_0$  變化之曲線



圖十 狀況 II，轉軸中央振動訊號頻率為 300Hz 之振幅隨裂縫位置  $x_0$  變化之曲線



6. Mayes, I.W., and Davies W.G.R., "The Vibrational Behavior of A Rotating Shaft System Containing A Transverse Crack", in *Vibrations in Rotating Machinery*, Institution of Mechanical Engineers., London, pp. 53-65 (1976).
7. Mayes, I.W., "Crack Propagation in Rotating Shafts", ASME Paper 77-DET-164 (1977).
8. Grabowski, B., and Mahrenholtz, O., "Theoretical and Experimental Investigations of Shaft Vibrations in Turbomachinery Excited by Cracks", *Proceedings of the International Conference on Rotordynamic Problems in Power Plants*, Rome, pp. 507-514 (1982).
9. Muszynska, A., "Shaft Crack Detection", *Proceedings of the 7th Machinery Dynamics Seminar*, Edmonton, Canada (1982).
10. Dimarogonas, A.D., and Papadopoulos, C.A., "Vibration of Cracked Shafts in Bending", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 91, pp. 583-593 (1983).
11. Papadopoulos, C.A., and Dimarogonas, A.D., "Coupled Longitudinal and Bending Vibrations of A Rotating Shaft with An Open Crack", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 117, pp. 81-93 (1987).
12. Dirr, B.O., and Schmalhorst, B.K., "Crack Depth Analysis of A Rotating Shaft by Vibration Measurement", *The ASME 11th Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise*, Vol. 2, pp. 607-614 (1987).
13. Schmalhorst, B.K., "Numerical Simulation of Cracked Rotor's Vibrations Due to Measured Crack Shapes", *Proceedings of the 2nd International Symposium on Transport Phenomena*, Vol. 2, pp.271-285 (1988).
14. Imam, I., Azzaro, S.H., Bankert, R.J., and Scheibel, J., "Development of An On-Line Rotor Crack Detection and Monitoring System", *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, ASME, Vol. 111, pp. 241-250 (1989).
15. Jörg Wauer, "On the Dynamics of Cracked Rotors : A literature Survey", *Applied Mechanics Review*, ASME, Vol. 43, No. 1, pp. 13-17 (1990).
16. 黃世欽，「具裂隙轉軸之撓曲振動及轉子振動分析」，國立臺灣工業技術學院研究報告 (1990)。
17. 林其璋，林呈，「裂軸診斷研究」，行政院原子能委員會核能研究所專題研究計畫報告 (1994)。

論文收稿日期：84年7月6日

論文修訂日期：84年8月11日

論文接受日期：84年8月20日